

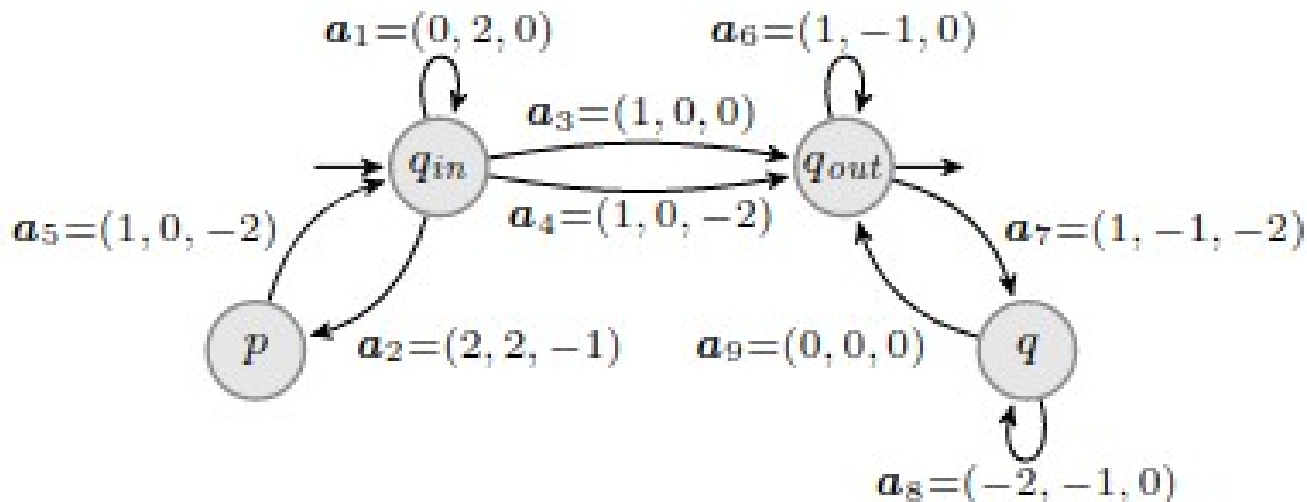


Largeur du produit cartésien d'ordinaux

Isa Vialard

Motivation

- WQO \rightarrow WSTS (Machine à compteurs, VASS)
 \rightarrow Vérification de programmes
- Mesure \rightarrow Complexité



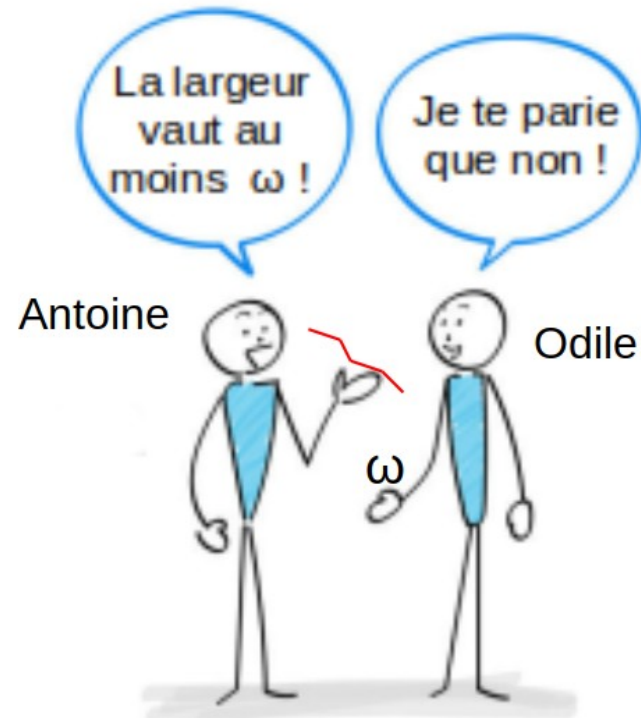
Invariants ordinaux

- Arbre des suites décroissantes = Hauteur
mauvaises suites = Maximal order type
antichaines = Largeur

Invariants ordinaux

- suites décroissantes = Hauteur
- Arbre des mauvaises suites = Maximal order type
- antichaines = Largeur

- Intuition par jeu



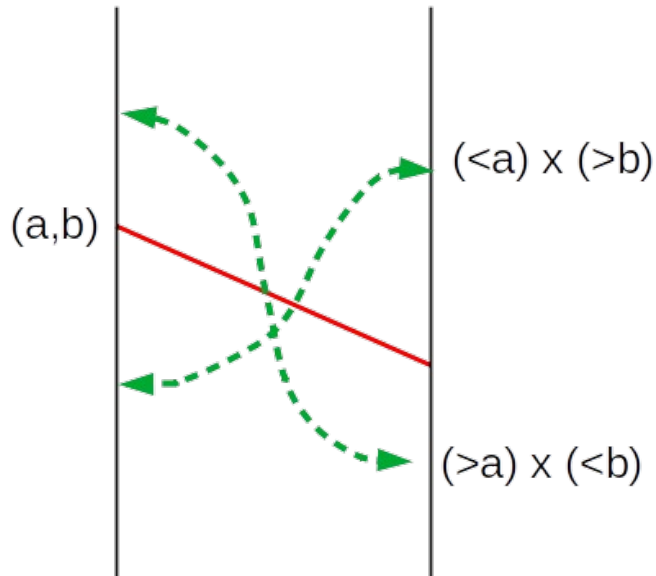
État de l'art

Table 1: Ordinal invariants of the main WQOs.

P	$o(P)$	$h(P)$	$w(P)$
α ordinal	α	α	1 (or 0)
A_n (size n antichain)	n	1	n
\mathbb{N}^2	ω^2	ω	ω
$\sum_{i \in \alpha} P_i$	$\sum_{i \in \alpha} o(P_i)$	$\sum_{i \in \alpha} h(P_i)$	$\sup_{i \in \alpha} w(P_i)$
$P \sqcup Q$	$o(P) \oplus o(Q)$	$\max(h(P), h(Q))$	$w(P) \oplus w(Q)$
$P \cdot Q$	$o(P) \cdot o(Q)$	$h(P) \cdot h(Q)$	$w(P) \odot w(Q)$
$P \times Q$	$o(P) \otimes o(Q)$	$h(P) \hat{+} h(Q)$?
$M(P)$	$\omega^{\widehat{o(P)}}$	$h^*(P)$?
$P^{<\omega}$	$\omega^{\omega^{o(P) \pm 1}}$	$h^*(P)$	$o(P^{<\omega})$
$T(P)$	$\vartheta(\Omega^\omega \cdot o(P))$	$h^*(P)$	$o(T(P))$



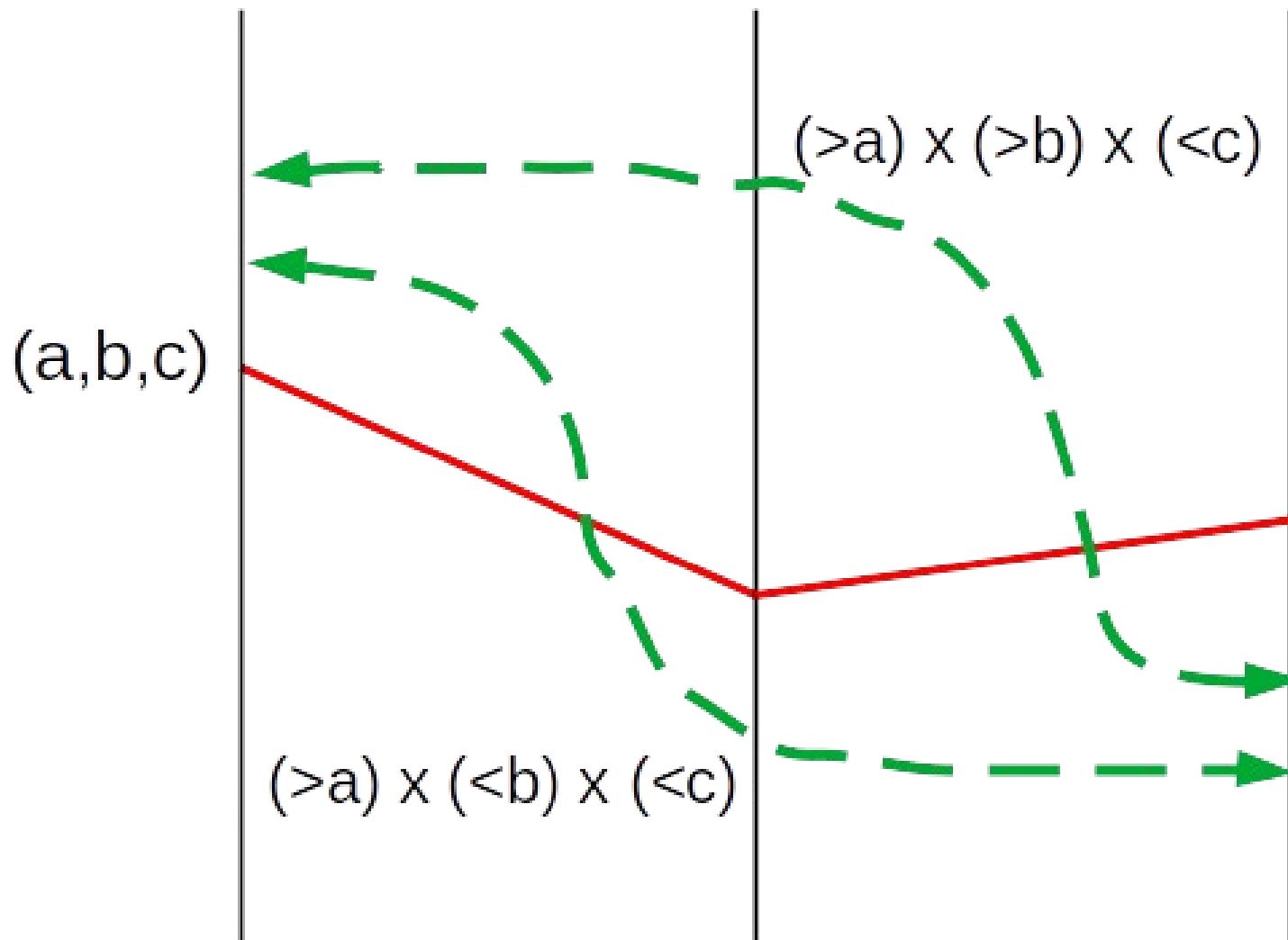
Produit cartésien de 2 ordinaux



- Uri Abraham, 1987, *A note on Dilworth theorem in the infinite case*

$$w(\omega\alpha \times \omega\beta) = \omega\omega^{\alpha' \oplus \beta'} \cdot (a + b - 1) \dot{+} [w(\omega\omega^{\alpha'} \times \omega\sigma) \oplus w(\omega\omega^{\beta'} \times \omega\rho)] .$$

Produit de 3 ordinaux ?

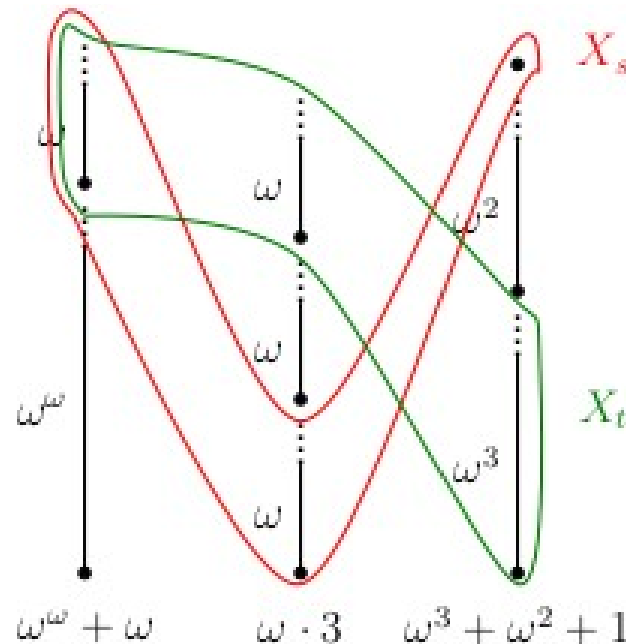


Produit cartésien de n ordinaux

- On décompose un produit d'ordinaux X en tranches X_s .

Théorème

$$w(X) = \bigoplus_{s \in Gr(X)} w(X_s).$$



Application

- Une condition suffisante pour $\mathfrak{o}(X) = \mathfrak{w}(X)$

Théorème.

Soit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. S'il existe $i \neq j$ tels que $\mathfrak{o}(X_i), \mathfrak{o}(X_j)$ sont de la forme $\omega^\alpha, \omega^\beta$ avec α, β infinis, alors $\mathfrak{w}(X) = \mathfrak{o}(X)$.

Preuve :

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{o}(X_1) \times \cdots \times \mathfrak{o}(X_n)) \leq \mathfrak{w}(X) \leq \mathfrak{o}(X)$$

Wqos élémentaires

$A, B := \emptyset \mid A \sqcup B \mid A \times B \mid A^* \mid M^\circ(A) \mid (\text{coming soon } P_f(A))$

X	$\mathbf{o}(X)$	$\mathbf{h}(X)$	$\mathbf{w}(X)$
$A \sqcup B$	$\mathbf{o}(A) \oplus \mathbf{o}(B)$	$\max(\mathbf{h}(A), \mathbf{h}(B))$	$\mathbf{w}(A) \oplus \mathbf{w}(B)$
$A \times B$	$\mathbf{o}(A) \otimes \mathbf{o}(B)$	$\mathbf{h}(A) \hat{+} \mathbf{h}(B)$	New !
$M^\circ(A)$	$\widehat{\omega^{\mathbf{o}(A)}}$	$\mathbf{h}^*(A)$	$\begin{cases} \mathbf{o}(M^\circ(A)) & \text{if } \mathbf{o}(A) \text{ is infinite,} \\ \omega^{k-1} & \text{if } \mathbf{o}(A) = k \end{cases}$
A^*	$\omega^{\omega^{\mathbf{o}(X)} \pm 1}$	$\mathbf{h}^*(A)$	$\begin{cases} \mathbf{o}(A^*) & \text{if } \mathbf{o}(A) > 1 \\ \text{else } 1 \end{cases}$



Conclusion