

BRAVAS

Les FAC
topologiquement vôtres

Jean Goubault-Larrecq

Espaces noethériens

- ❖ Une généralisation topologique des wqo
- ❖ **Defn:** X est *noethérien* ssi toute suite croissante d'ouverts $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$ est stationnaire.

Wqo	Noethériens
Clos par le hauts	Ouverts
Clos par le bas	Fermés
Fct. monotone	Fct. continue
Rel. monotone	Rel. semi-cont. inf.
Idéaux	Irréductibles clos
$\text{Idl}(X)$	Sobrifié $S(X)$

Un catalogue de noethériens

$D ::=$	A	(finite—or wqo—, Alex. topo. of \leq)	
	\mathbb{N}	(Alex. topo. of natural ordering \leq)	
	\mathbb{C}^k	(with Zariski topology)	*
	$\text{Spec}(R)$	(with Zariski topology)	*
	$D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$	(product)	
	$D_1 + D_2 + \dots + D_n$	(disjoint union)	
	D^*	(with subword topology)	
	D^{\otimes}	(with submultiset topology)	
	$\mathcal{T}(D)$	(with tree topology)	
	$D^{*,\text{pref}}$	(with prefix topology)	*
	$\mathcal{H}(D)$	(Hoare powerdomain)	*
	$\mathbb{P}(D)$	(with lower Vietoris topology)	*
	$\mathcal{S}(D)$	(with lower Vietoris topology)	*

(*: not valid in wqo case.)

Des représentations informatiques

- ❖ Le sobrifié (=complété) de $\text{Construction}(X)$ est représentable dès que celui de X l'est
- ❖ $\mathbf{S}(\mathbb{N}^k) = \mathbb{N}_\omega^k$
- ❖ $\mathbf{S}(D^*) = \text{word products sur l'alphabet } \mathbf{S}(D)$ $a^? \{a, b\}^* c^? \{a, c\}^* b^?$
- ❖ $\mathbf{S}(\mathcal{T}(D)) = \text{certaines expressions régulières sur } \mathbf{S}(D)$
- ❖ $\mathbf{S}(\mathbb{P}(D)) = \mathbb{P}_{\text{fin}}(D) \dots$ ceci excède le cadre des wqo.
- ❖ $\mathbf{S}(\mathbb{Q}^k, \text{Zariski}) = \{\text{variétés algébriques irréductibles}\}$,
représentables par bases de Gröbner...
toujours calculable, mais largement en-dehors des wqo

Programmes polynomiaux concurrents

Théorème [JGL 2010]: L'accessibilité d'états définis par motifs interdits dans les programmes polynomiaux concurrents à pertes est décidable.

(algorithme en arrière standard)

```
while (*) {
  recv (SIG_CALC) => if (*) { x = 2; y = 3; }
                    else { x = 3; y = 2; }
  x = x * y - 6; y = 0;
  if (x2 - 3 * x * y == 0)
    while (*) { x = x + 1; y = y - 1; };
  else send (SIG_FUZZ);
  x = x2 + x * y;
  | recv (SIG_QUIT) => return;
}
```

channel c_1

a	b	d	a	c
---	---	---	---	---

channel c_2

b	c
---	---

```
a = *; b = 0;
while (*) {
  recv (SIG_FUZZ) => send (SIG_CALC);
  b = b + 1;
  if (a != b) { a = a + 1; }
  c = a * b;
  | recv (SIG_QUIT) => return;
}
```

- ❖ Etend les programmes polynomiaux de Müller-Olm et Seidl'02.
- ❖ Espace d'états $\prod_i \mathbb{C}^{k[i]} \times (\Sigma^*)^{\# \text{canaux}}$
... pas wqo (ordering on $\mathbb{C}^{k[i]}$ would be equality)
mais noethérien: produit de Zariski x wqos
- ❖ Un exemple de **WSTS topologique**

FAC

- ❖ Rappel: $wqo = FAC + \text{bien fondé}$
FAC = toute antichaîne est finie
- ❖ Alain a généralisé les WSTS en WBTS, en remplaçant wqo par FAC
- ❖ **Théorème** [Erdős-Tarski 43, Bonnet 72, Kabil et Pouzet 92, plein d'autres]:
Un poset est FAC \Leftrightarrow tout clos par le bas est union **finie** d'idéaux.

FAC topologiques?

- ❖ **Définition:** un espace topologique X est FAC \Leftrightarrow toute partie close est union **finie** d'irréductibles.
- ❖ Noethérien = FAC + inclusion bien fondée sur les irréductibles clos (ou sur les clos, c'est pareil ici)
- ❖ **Théorème:** Si, dans X , tout sous-espace clos a un sous-espace noethérien partout dense, alors X est FAC.
- ❖ **Exemples** (non noethériens): \mathbb{Z}, \mathbb{R} (topologie de Scott)
Non-exemples: $\mathbb{Z}^k, \mathbb{R}^k$ (topologie de Scott) pour $k \geq 2$
- ❖ Réciproque? Exemples moins triviaux? Applications?